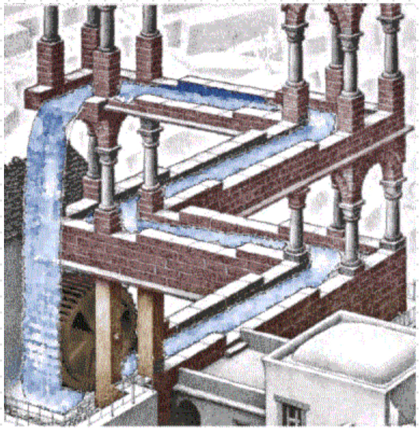
UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

Departamento de Engenharia (DEG)

Análise e Otimização de Processos Químicos



Graduação em Engenharia Química

Prof. Irineu Petri Júnior

2018

2. Sistema de Matrizes

- <u>**Revisão sobre funções e matrizes**</u>

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 4 \\ 6 & 7 & -1 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 9 \\ 5 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 \\ 5 & 2 & -9 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 8 & 8 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & -9 & 4 \\ 6 & 7 & -1 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+5y+3z-16=0 \\ 2x+8y+7z-33=0 \\ 4x+y+z-12=0 \end{cases}$$

Propriedades de Matrizes

$$A+B=B+A$$

$$-(A)=-A$$

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

$$\left(A.B\right)^T = A^T.B^T$$

$$\left(A.B\right)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$$

$$A^{-1}.\mathrm{A} = \mathrm{I}$$

$$\mathrm{A}.\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$$

Revisão sobre equações

- **EDO:** apenas uma variável independente;
- **EDP:** mais de uma variável independente;

- **Linear:** termos que acompanham a função incógnita e suas derivadas são lineares;
- **Não-Linear:** há pelo menos um termo não-linear na função incógnita ou suas derivadas;

- **Homogêneas:** termo fonte é identicamente nulo;
- **Heterogêneas:** termo fonte é identicamente diferente zero;

- **Coeficiente constante:** coeficientes constantes;
- **Coeficiente variável:** coeficientes são funções de variáveis;

- **Ordem:** ordem da maior derivada presente na equação (y’,y”,etc...);
- **Grau:** grau da mais alta derivada presente (y, y^2, y^3,etc...)

EDO/EDP, L/NL, Homog./Heter., Ordem, Grau, tipo coef.

- Exemplos:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

EDO, Linear, Heterogênea, 2ª Ordem, 1º Grau, coef. variáveis

$$y'^2 - x\,y' - y = 0$$

EDO, Não-linear, Homogênea, 1ª Ordem, 2º Grau, coef. variáveis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{P}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

EDP, Linear, Homogênea, 2ª Ordem, 1º Grau, coef. constantes

$$\frac{dP}{dt} = 0,5P - 450$$

EDO, Linear, Heterogênea, 1ª Ordem, 1º Grau, coef. constantes

$$9yy' + 4x = 0$$

EDO, Não-linear, Heterogênea, 1ª Ordem, 1º Grau, coef. variáveis

$$\theta(t) + \frac{L}{g} sen[\theta(t)] = 0$$

EDO, Não-linear, Homogênea, 1ª Ordem, 1º Grau, coef. constantes

- **EDO's de 1ª ordem, homogênea, coeficientes constantes**

Considere a reação química, em reator batelada:

$$A \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} B \xrightarrow{k_2} C$$

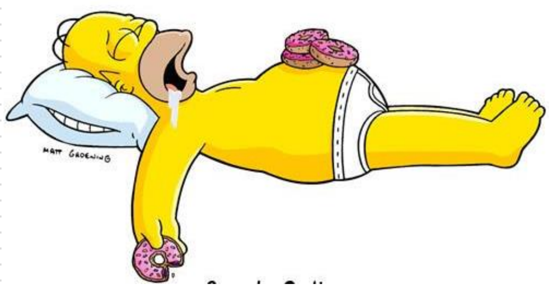
Fazendo o balanço de massa para cada componente, em um reator batelada:

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(C_A V\right)}{dt} = -r_A V \\ \dfrac{d\left(C_B V\right)}{dt} = -r_B V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\left(C_A V\right)}{dt} = -(k_1 C_A - k_{-1} C_B)\,\mathrm{V} \\ \dfrac{d\left(C_B V\right)}{dt} = -\left[(k_{-1} + k_2)\,\mathrm{C_B} - k_1 C_A\right]\mathrm{V} \end{cases}$$

$\Downarrow$ considerando V=cte

$$\begin{cases} \dfrac{dC_A}{dt} = -k_1 C_A + k_{-1} C_B \\ \dfrac{dC_B}{dt} = k_1 C_A - (k_{-1} + k_2)\,\mathrm{C_B} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dC_A}{dt} = -k_1 C_A + k_{-1} C_B \\[2ex]
\dfrac{dC_B}{dt} = -(k_{-1} + k_2)\,\mathrm{C_B} + k_1 C_A
\end{cases}
$$



Resolva o modelo

Podemos reescrever na forma matricial:

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & k_{-1} \\ k_1 & -(k_{-1} + k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix}
$$

$$
\frac{dy}{dt} = A.y
$$

Como resolver EDO na forma matricial?

▪ Autovalores e Autovetores

Considere uma matriz A qualquer, sendo:

- λ são autovalores de A (escalar, Re ou Im) – "*eigenvalues*"
- z são autovetores de A (vetorial) – "*eigenvectors*"

$$A.z = z.\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(A - \lambda.I)}_{=0} z = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A - \lambda.I) = 0$$

Exemplo:

Quais são os autovalores e autovetores dessa matriz?

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo: $\det(A-\lambda.I)=0$

$$\det\left(\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}-\lambda.\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}-3-\lambda & 1\\ -2 & -\lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$(-3-\lambda)(-\lambda)-(1)(-2)=0$$

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

$$\begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=-2\end{cases}$$ **autovalores de A**

Ou seja, $\begin{cases}(A-(-1).I)z=0\\ (A-(-2).I)z=0\end{cases}$

Cada autovalor tem um autovetor associado:

Para λ₁ = -1

$$(A-\lambda_1.I)z_1=0$$

$$\left(\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}-(-1).\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)z_1=0$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1^{(1)}\\ z_1^{(2)}\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(1)} \\ z_1^{(2)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2z_1^{(1)} + z_1^{(2)} = 0 \\ -2z_1^{(1)} + z_1^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$z_1^{(2)} = 2z_1^{(1)}$$

Qualquer vetor na forma:

$$z_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ 2z_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para λ_2 = -2

$$(A - \lambda_2 . I) z_2 = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - (-2). \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) z_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2^{(1)} \\ z_2^{(2)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -z_2^{(1)} + z_2^{(2)} = 0 \\ -2z_2^{(1)} + 2z_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$z_2^{(1)} = z_2^{(2)}$$

Qualquer vetor na forma:

$$z_2 = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Considere uma EDO de 1ª ordem, homogênea, coeficientes constantes, do Slide 6:

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

A solução para este tipo de problema é:

$$y = C.e^{At}$$

Aplicando a solução da EDO para o caso de sistema de equações, com os autovalores no domínio do Re, temos:

$$y = zCe^{\lambda t}$$

Ou seja,

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} z_1^{(1)} \\ z_1^{(2)} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{bmatrix} z_2^{(1)} \\ z_2^{(2)} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}}$$

Caso os autovalores sejam iguais ($\lambda_1 = \lambda_2$), a solução será do tipo:

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \end{bmatrix} e^{\lambda t} + C_2 \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \end{bmatrix} te^{\lambda t}}$$

Sendo:

$$(A - \lambda I)\,z_1 = 0$$

$$(A - \lambda I)\,z_2 = z_1$$

Caso os autovalores estejam do domínio do Im, temos no autovalor uma função do tipo:

$$\lambda = \alpha \pm \beta i$$

Segundo a formula de Euler: $e^{\beta t} = \cos \beta t + i \,\mathrm{sen}\, \beta t$

A solução do problema fica:

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} z_1^{(1)} \cos \beta t \\ z_1^{(2)} \cos \beta t \end{bmatrix} e^{\alpha t} + C_2 \begin{bmatrix} z_2^{(1)} \,\mathrm{sen}\, \beta t \\ z_2^{(2)} \,\mathrm{sen}\, \beta t \end{bmatrix} e^{\alpha t}}$$

Sendo que, $i \cos t = \mathrm{sen}\, t$

$$i \,\mathrm{sen}\, t = \cos t$$

Exemplos

Calcule a solução do sistema de EDO's de 1ª ordem mostrado abaixo

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -3x_1 + x_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -2x_1 \end{cases} \qquad \textbf{CI:} \quad \begin{matrix} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 5 \end{matrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Já encontramos os autovetores e autovalores desse sistema $\longrightarrow$ $\lambda_1 = -1 \quad z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -2 \quad z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-t} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-2t} \longrightarrow \begin{matrix} y_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \\ y_2 = 2C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \end{matrix}$$

Aplicando as condições iniciais, temos:

$$\begin{matrix} 1 = C_1 + C_2 \\ 5 = 2C_1 + C_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_1 = 4 \\ C_2 = -3 \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} y_1 = 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ y_2 = 8e^{-t} - 3e^{-2t} \end{matrix}}$$

Exemplos

Calcule a solução do sistema de EDO's de 1ª ordem mostrado abaixo

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = x_1 - x_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 5x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

CI: $y_1(0) = 10$, $y_2(0) = 7$

$$\lambda = [-1 \pm i]$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix}$$

$$y_1 = e^{-t}\left(10\cos t + 13\,\mathrm{sen}\,t\right)$$

$$y_2 = e^{-t}\left(7\cos t + 36\,\mathrm{sen}\,t\right)$$

Plano de fases

É o comportamento dinâmico das variáveis de acordo com as condições iniciais. Este é um método gráfico, que admite interpretações geométricas do comportamento qualitativo da solução no tempo, sem recorrer a expressões analíticas na forma fechada.

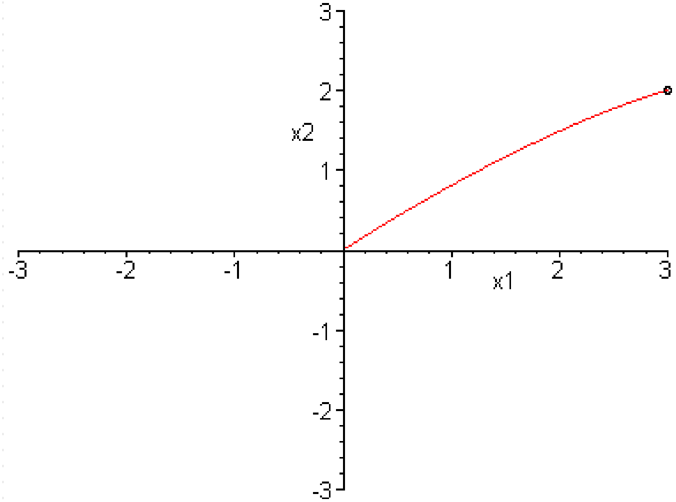
Ex.:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x1, x2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x1, x2) \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{matrix}$$

calculado ou conhecido

$$x_1(t_f) = 3$$

$$x_2(t_f) = 2$$



→ **Comportamento é dado pela análise do autovalor (λ_1 e λ_2)**

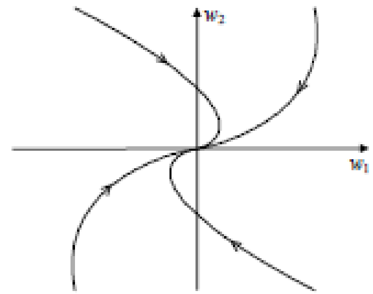
Análise do autovalor

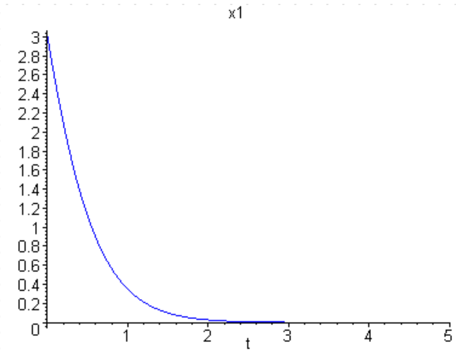
- **Nó atrator ou nó estável**: Ambos autovalores negativos (λ_1 e $\lambda_2 < 0$)

$$\lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \in \Re$$

$$\lim_{t\to\infty} w_1 = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} w_2 = 0$$



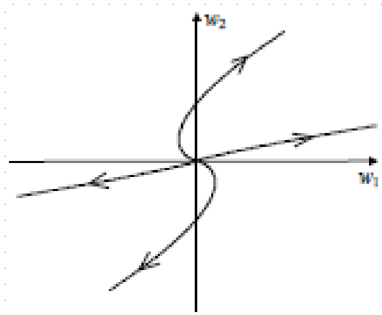


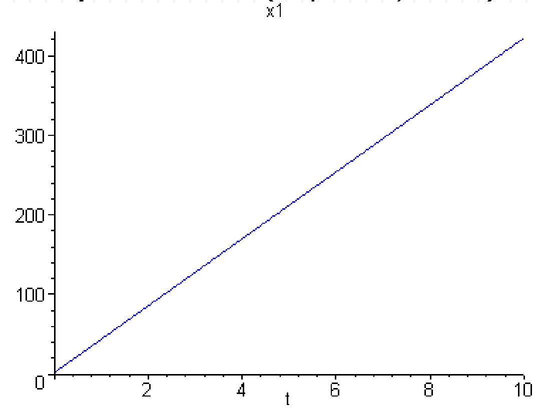
- **Nó repulsor ou nó instável**: Ambos autovalores positivos (λ_1 e $\lambda_2 > 0$)

$$\lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \in \Re$$

$$\lim_{t\to\infty} w_1 = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} w_2 = 0$$





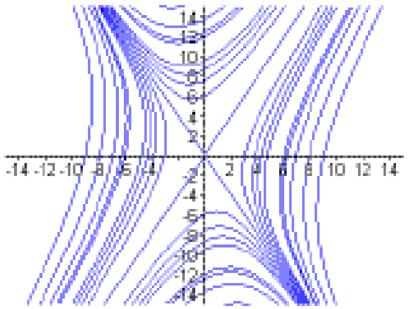
Análise do autovalor

- **Ponto de cela**: Autovalores negativos e positivos ($\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$)

$$\lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \in \Re$$

$$\lim_{t\to\infty} w_1 = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} w_2 = 0$$

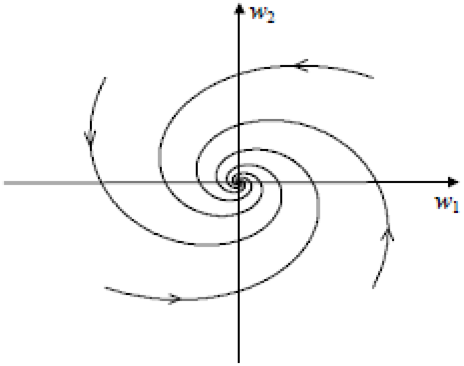


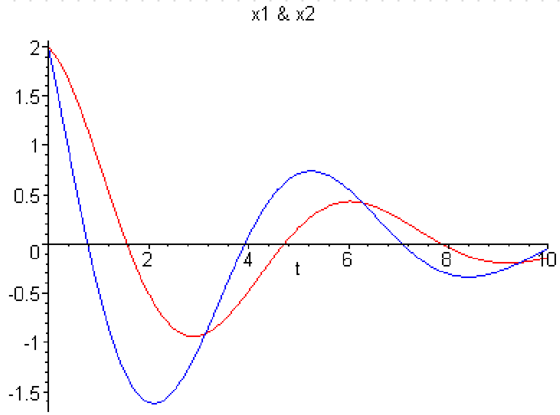
- **Foco estável**: $(\mathrm{Re}(\lambda) < 0)$

$$\lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \in \Im m$$

$$\lim_{t\to\infty} w_1 = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} w_2 = 0$$





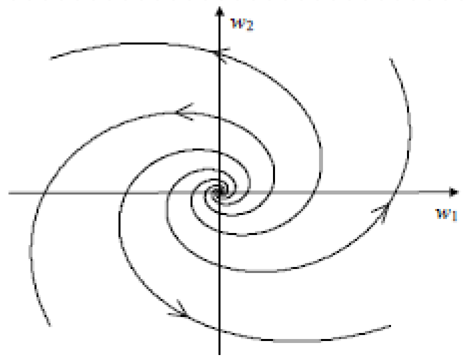
Análise do autovalor

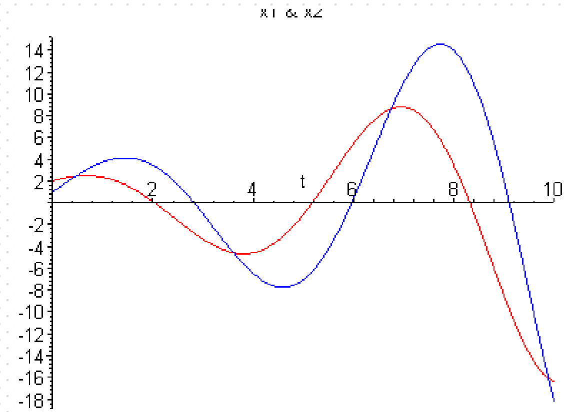
➢ **Foco instável**: (Re(λ) > 0)

$$\lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \in \Im m$$

$$\lim_{t\to\infty} w_1 = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} w_2 = 0$$



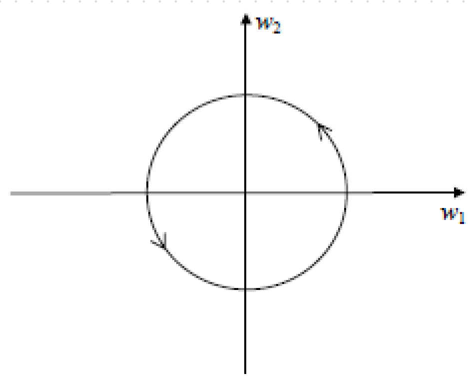


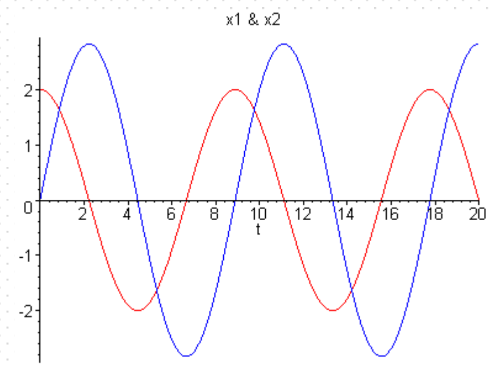
➢ **Foco centro**: (Re(λ) = 0)

$$\lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \in \Im m$$

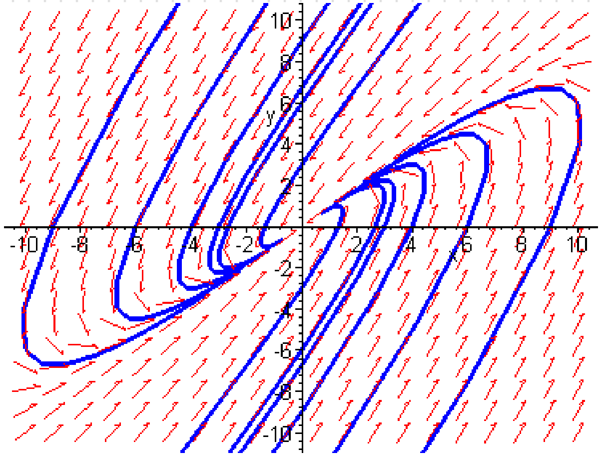
$$\lim_{t\to\infty} w_1 = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} w_2 = 0$$

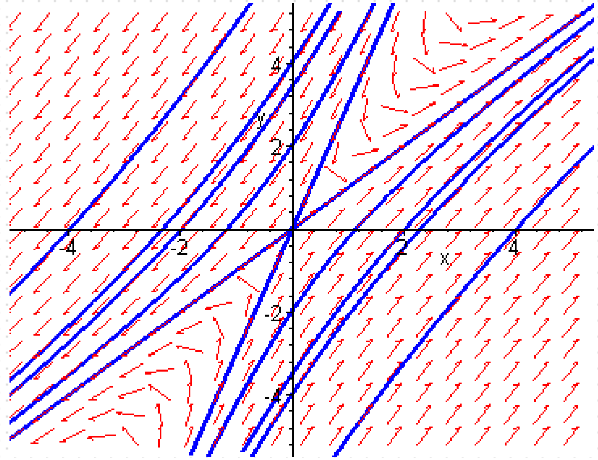




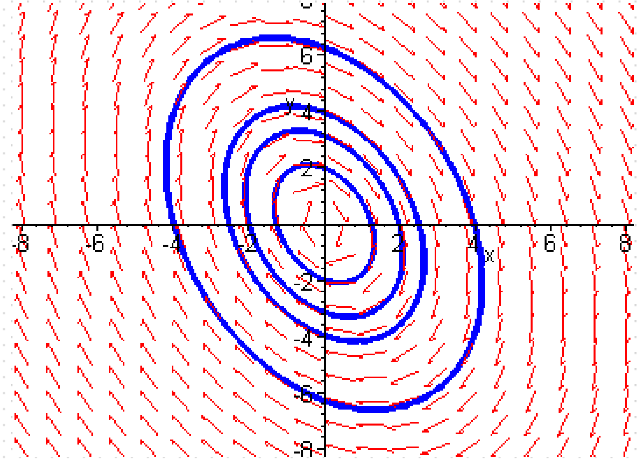
Exemplos



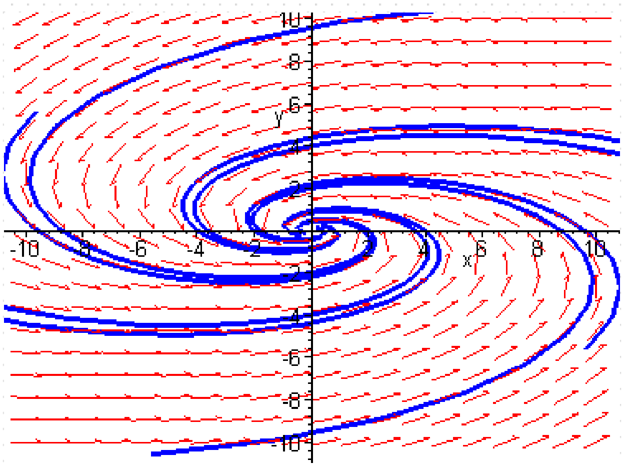
(λ_1 e $\lambda_2 < 0$)



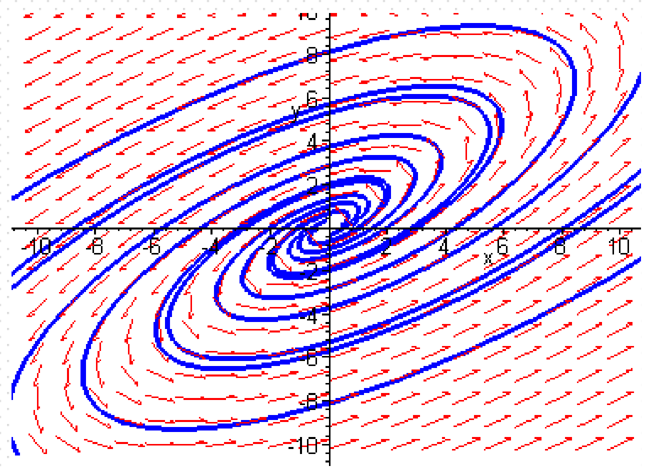
($\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$)



($Re(\lambda) = 0$)



($Re(\lambda) < 0$)



($Re(\lambda) > 0$)

▪ EDO's de n^{ésima} ordem, homogênea, coeficientes constantes

Uma EDO de ordem *n*, pode ser convertida num sistema de *n* EDO's de 1ª ordem, por exemplo:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)})$$

Sendo que,

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y'_1 &= y' = y_2 \\ y'_2 &= y'' = y_3 \\ y'_3 &= y''' = y_4 \\ &\vdots \\ y'_{(n+1)} &= y^{(n+1)} = y_n \end{aligned} \quad \xrightarrow{\textbf{então}} \quad \textbf{EDO's 1ª ordem} \left\{ \begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ y'_3 &= y_4 \\ &\vdots \\ y'_{(n+1)} &= y_n \\ y'_n &= f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}) \end{aligned} \right.$$

- **Exemplo**

Resolva a EDO de 2ª ordem abaixo, sendo: m = 1, c = 2, k = 0,75:

$$my'' + cy' + ky = 0$$

$$\downarrow$$

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

Fazendo:

$$y_1 = y \qquad \therefore y'_1 = y' = y_2$$

$$y_2 = y' \qquad \therefore y'_2 = y''$$

Temos,

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 + \dfrac{c}{m}y_2 + \dfrac{k}{m}y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Sistema EDO's 1ª ordem

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = -\dfrac{c}{m}y_2 - \dfrac{k}{m}y_1 \end{cases} \Rightarrow$$

Na forma matricial:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

- **Exemplo**

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,75 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo por meio dos autovalores/autovetores, temos:

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = -0,5 \\ \lambda_2 = -1,5 \end{matrix}} \qquad \boxed{z_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,5 \end{bmatrix}}$$

A função será estável e terá a seguinte solução:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-0,5t} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1,5 \end{bmatrix}e^{-1,5t}$$

Porém, sabe-se que y_1=y, logo a solução final será:

$$y = 2C_1e^{-0,5t} + C_2e^{-1,5t}$$

Métodos de solução de sistemas de equações algébricas não lineares

Lista de Exercícios II

www.irineupetri.com